Application de diakoptique tensorielle pour les calculs numériques parallélisés dans la résolution des systèmes complexes

Yuri Sohor

Professeur à l'institut polytechnique d'État de Pskov, 4 rue Lev Tolstoï 180004 Pskov, Russie, diakoptics-fr@narod.ru, page personnelle : http://www.diakoptics-fr.narod.ru

Résumé: On propose dans ce papier de présenter l'utlisation de la diakoptique dans le cadre de l'analyse tensorielle des réseaux de G.Kron pour résoudre des problématiques de systèmes complexes. La diakoptique permet de paralléliser le calcul du système complet. On montre comment la diakoptique associée à la technologie de programmation coarray Fortran portée sur des architectures multicoeurs associe une tâche à chaque unités de calcul.

Mots-clés : calculs parallèles, coarray Fortran, diakoptique, Kron G., modélisation multiphysique, ordinateurs multicoeurs, systèmes complexes.

1. INTRODUCTION

La recherche des régularités dans les structures et le fonctionnement des systèmes dans leurs différentes configurations amène à la l'élaboration techniques mathématiques multiphysiques multiéchelles. L'analyse tensorielle des réseaux et la diakoptique [1] sont des méthodes éprouvées dans la résolution des systèmes complexes. La description de ces systèmes impose une grande quantité de variables et d'équations, pour la résolution desquelles il est nécessaire de disposer du maximum de puissance des équipements informatiques dans le cadre d'usage d'outils dispose numériques. Aujourd'hui on architectures de processeurs multicoeurs. Dans cet article on présente les résultats de l'utilisation de la méthode de diakoptique tensorielle pour des calculs parallélisés sur les ordinateurs multicoeurs.

2. LES METHODES NUMERIQUES REPOSANT SUR UN ELEMENT DE BRANCHE GENERALISEE

Pour gérer les aspects inhomogènes des systèmes on utilise la méthode des électroanalogies. L'application de la méthode des analogies électriques a permis de poser les équations pour divers types de sous-systèmes (dans les domaines de la thermique, de la mécanique etc.) sous forme de schémas électriques équivalents. Pour le calcul des

schémas électriques par des méthodes numériques on utilise classiquement les équations de la branche électrique généralisée, qui est représentée sur la fig.1 (également connue sous d'autres noms: branche de Kirchhoff, branche primitive, élémentaire, etc.).

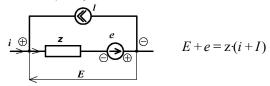


Figure 1: Le schéma et l'équation de la branche généralisée

Sur cette branche généralisée on construit des modèles électriques comme termes algébriques des équations différentielles ordinaires et des équations différentielles aux dérivées partielles. Par exemple, pour l'équation différentielle ordinaire décrivant un condensateur $i = C \frac{dE}{dt}$. Suivant un développement d'Euler au 1er ordre associée au pas Δt on a : $E_{n+1} - E_n = \frac{\Delta t}{C} i_{n+1}$. Pour la construction de l'équation de la branche généralisée on obtient : $e = -E_n$, $z = \frac{\Delta t}{C}$, I = 0. Dans les cas plus complexes, par exemple pour une capacité non linéaire, on peut appliquer une méthode implicite du $2^{\text{ème}}$ ordre ou une méthode itérative. Dans l'expression des composants de la branche généralisée les formules seront plus complexes:

$$e = \frac{C_n(E_n) \cdot \alpha_1}{C_{n+1}^{j-1}(E_{n+1}^{j-1}) \cdot \alpha_0} \cdot E_n + \frac{C_{n-1}(E_{n-1}) \cdot \alpha_2}{C_{n+1}^{j-1}(E_{n+1}) \cdot \alpha_0} \cdot E_{n-1}$$

$$z = -\frac{\varDelta t}{C_{n+1}^{j-1}(E_{n+1}^{j-1}) \cdot \alpha_0} \cdot i_{n+1} \,, \ I = 0 \;.$$

La branche généralisée peut être utilisée pour la construction des schémas électriques en remplacement des équations différentielles dans les dérivées partielles. Par exemple, pour une équation donnée :

$$\frac{\delta'}{\mu_0} \cdot \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - \frac{a}{\rho} \frac{dB}{dt} = -\frac{\partial J}{\partial x}$$

Après application d'une méthode des différences finales on obtient l'équation algébrique:

$$\frac{2\delta'}{\mu_0}(B_+ - B) - \frac{2\delta'}{\mu_0}(B - B_-) - \frac{4ah^2}{\rho} \frac{\Delta B}{\Delta t} = -2h(J_+ - J_-)$$
où $B_- = B(x-h,t)$; $B_- = B(x,t)$; $B_+ = B(x+h,t)$;

$$\Delta B = B(x, t + \Delta t) - B(x, t)$$
.

Partant de cette équation, on peut construire le schéma électrique équivalent :

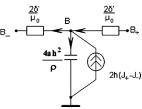


Figure 2: schéma électrique équivalent pour l'approximation algébrique de l'équation aux dérivées partielles.

Il est possible d'appliquer ces méthodes aux éléments finaux en même temps qu'à des éléments de frontière. En outre, la branche élémentaire est la branche sous-jacente à la structure topologique pour la formation automatique des équations des schémas électriques. Les branches généralisées connectées forment finalement la structure topologique du système complexe.

3. LA FORMATION DES EQUATIONS DES GRANDS SCHEMAS PAR LA DIAKOPTIQUE

Dans la méthode examinée le schéma d'ensemble est fait de sous-schémas. La composition des sous-schémas est définie "à la main". L'information sur les sous-schémas consiste en l'information sur les branches et les matrices de changement de bases.

Le calcul du grand schéma commence par le calcul des sous-schémas. Puisque les phénomènes électromagnétiques sont décrits dans l'espace des mailles [2], le calcul est accompli dans cet espace. L'espace des branches généralisées est donné par le vecteur du courant dans les branches, l'espace du schéma élaboré est donné par le vecteur des courants des mailles. Ce vecteur s'obtient par transformation via la matrice de changement de base (connectivité) de l'espace des branches vers l'espace des mailles. Les coordonnées nodales classiques sont présentées comme des mailles ouvertes. Les coordonnées nodales sont nécessaires à l'algorithme de formation automatique des équations du schéma à partir des sous-schémas :

$$\begin{bmatrix}
E_o \\
0
\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}
e_o \\
e_m
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
o \\
m
\end{bmatrix} \begin{bmatrix}
z_{oo} \\
z_{mo}
\end{bmatrix} \begin{bmatrix}
z_{om} \\
z_{mo}
\end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix}
0 \\
i_m
\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}
I_o \\
I_m
\end{bmatrix}$$

De cette équation, on obtient l'expression des tensions nodales E_o :

$$E_o = \mathbf{z}_{oo}^{\sim} I^o - e_o^{\sim}$$
, où $e_o^{\sim} = e_o - \mathbf{z}_{om} (\mathbf{z}_{mm})^{-1} e_m$, (1)

$$Z_{oo} = Z_{oo} - Z_{om} (Z_{mm})^{-1} Z_{mo}$$
 (2)

Après application des équations (1) et (2) aux sousschémas, on en déduit les schémas équivalents radiaux de ces sous-schémas (par exemple, comme sur la fig. 3).

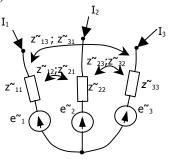


Figure 3: exemple du schéma équivalent radial du sous-schéma.

On applique la suite de la méthode de diakoptique ou calcul par parties : on accomplit le calcul des sous-schémas séparés, sans tenir compte de leurs liaisons vers le schéma global (le calcul des schémas radiaux équivalents pour les sous-schémas et tensions sur les noeuds de frontière). On introduit les résistances des liens joignant les sous-schémas dans les nœuds (les résistances des liens forment le réseau dit des intersections dans les noeuds de frontière). Après une dernière étape de liaison des

branches appartenant du réseau des intersections, on forme le schéma total, sa dimension étant moins grande que la dimension du schéma complet. On résout alors le calcul du schéma total dans l'espace des mailles, et pour terminer on prend en considération l'influence mutuelle des sous-schémas. Les sous-schémas se calculent par la méthode des potentiels nodaux et sont identifiés au global aux schémas équivalents radiaux par les tensions de noeuds E_o et les résistances de noeuds Z_{oo} . Nous allons examiner l'exemple présenté fig. 4.

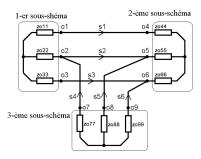
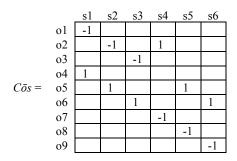


Figure 4: exemple de la liaison de trois sousschémas

On peut diviser en trois groupes les liens qui forment le réseau des intersections. Au premier groupe se rapportent les branches s1, s2 et s3, au deuxième groupe se rapportent la branche s4, au troisième groupe se rapportent les branches s5 et s6. On en déduit la matrice d'incidence décrivant le réseau d'intersections :



La matrice des impédances du réseau d'intersections $\mathbf{z_{ss}}$ est calculée par la transformation standard de la matrice des impédances de noeuds de frontières $\mathbf{z_{ss}} = C_{S\bar{o}} \cdot \mathbf{z} \tilde{o}_{\bar{o}} \cdot C_{\bar{o}s}$ En analysant le contenu de la matrice \mathbf{z}_{ss} , on voit que cette matrice reflète le schéma présenté fig. 5. Nous pouvons alors calculer la source de tension pour chaque branche de réseau élémentaire des intersections. Cette source se forme aussi par une transformation classique : $es = -Cs\bar{o} \cdot E\bar{o}$.

Nous avons établi qu'entre chaque couple de sous-schémas on peut choisir une branche totale.

Sur la fig.5 ces branches totales sont s3, s4 et s5. Les autres branches : s1, s2, s6 - sont des branches dites complémentaires.

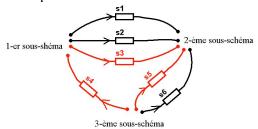
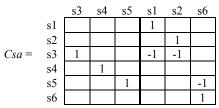


Figure 5 : réseau des interconnexions. On met en relief les branches totales.

Entre chaque couple de sous-schémas voisins se forme un réseau d'échange ou « réseau de circulation ». Les branches totales forment l'arbre couvrant, les autres branches forment les mailles du réseau de circulation. La matrice décrivant le réseau de circulation est :



Maintenant, nous utiliserons uniquement les branches totales et nous laisserons toutes les autres branches. Nous voyons que les branches totales \$3, \$4 et \$5 forment un certain schéma indépendant, vers lequel les contours et les « paires de nœuds » entrent (Fig.6).

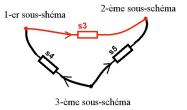


Figure 6: Le réseau total

Le schéma total reflète la structure de la liaison des sous-schémas. Cette structure est beaucoup plus simple que celle du schéma complet. On peut trouver dans le réseau total de la fig.6 de nouveau deux branches d'un arbre couvrant et une branche complémentaire. Par exemple, on retient les branches de l'arbre s4 et s5, s3 devenant la branche complémentaire. Le schéma n'étant plus réductible, on peut définitivement énumérer toutes les branches des compléments : s1, s2, s6, s3 et les branches de l'arbre couvrant total : s4 et s5. La matrice

orthogonale reflétant les liaisons des branches du réseau d'intersections au schéma total s'en déduit :

	s4	s5	s3	s1	s2	s6
s3			1			
s3 $s4$ $Cap = s5$	-1		1			
Cap = s5		-1	-1			
s1				1		
s1 s2 s6					1	
s6						1

Pour le calcul par la méthode des courants de mailles, on peut mettre en relief dans la matrice C_{ap} la sous-matrice des contours fermés C_{apm} . Elle est faite des colonnes des branches des compléments s1, s2, s6, s3:

	s3	s1	s2	s6
s3	1			
s3 s4	1			
$C_{apm} = s5$	-1			
s1		1		
s2 s6			1	
s6				1

D'où l'on déduit :

$$C_{\bar{o}pm} = C_{\bar{o}s} \cdot C_{sa} \cdot C_{apm} \tag{3}$$

La matrice des impédances des mailles du schéma complet s'écrit de fait :

$$z_{pmpm} = C_{pm\bar{o}} \cdot z_{\bar{o}\bar{o}} \cdot C_{\bar{o}pm}. \tag{4}$$

et le vecteur des forces électromotrices des mailles:

$$e_{pm} = -C_{pm\bar{o}} \cdot E_{\bar{o}}. \tag{5}$$

On calcule la matrice inverse :

$$y_{pmpm} = (z_{pmpm})^{-1} (6)$$

Le vecteur des courants des mailles se trouve suivant la relation:

$$i_{pm} = y_{pmpm} \cdot e_{pm}. \tag{7}$$

Le calcul des courants i_{pm} peut être accompli par la méthode du Gauss, en utilisant l'équation:

$$e_{pm} = z_{pmpm} \cdot i_{pm}. \tag{7}$$

Dans ce cas le calcul de la matrice inverse ne se pose pas. Les courants dans les liens sont calculés à partir des courants de mailles précédemment trouvés:

$$i_{S} = C_{SDm} \cdot i_{Dm}. \tag{8}$$

 $i_S = C_{Spm} \cdot i_{pm}$. (8) Les courants des branches du lien, qui vont aux sous-schémas, se manifestent comme les courants supplémentaires dans les noeuds de frontière des sous-schémas. Ceci est la conséquence de la relation:

$$\Delta I_{\bar{o}} = C_{\bar{o}S} \cdot i_{S}. \tag{9}$$

raison En l'apparition de courants supplémentaires dans les noeuds, У

accroissement des tensions nodales dans les sousschémas:

$$\Delta E_o = z_{o\bar{o}} \cdot \Delta I_{\bar{o}}. \tag{10}$$

Les courants supplémentaires s'en déduisent également dans les mailles des sous-schémas:

$$\Delta i_m = -(z_{mm})^{-1} z_{m\bar{o}} \Delta I_{\bar{o}}$$
 (11)

Les tensions aux noeuds et les courants de mailles des sous-schémas s'expriment alors par :

$$\check{E}_o = E_o + \Delta E_o. \tag{12}$$

$$\tilde{i}_m = i_m + \Delta i_m \tag{13}$$

De ces expressions, on obtient les tensions et courants définitifs des branches des sous-schémas:

$$E_b = A_{bo} \cdot \check{E}_o, \tag{14}$$

$$i_b = C_{b\bar{o}} \cdot \Delta I_{\bar{o}} + C_{bm} \cdot (I_m + \tilde{\iota}_m). \tag{15}$$

Cette dernière relation conclue le calcul du grand schéma par la méthode diakoptique.

Les résultats obtenus peuvent être appliqués pour l'étude des réseaux avec des structures variables pour la liaison des sous-schémas. Les branches du lien (par exemple, s1-s6 sur le fig. 4) se présentent comme des clés idéales qui rompent le réseau en circuit-ouvert dans l'état non-conducteur deviennent des « cavaliers » en court-circuit dans l'état passant. La structure du réseau totale (par exemple, sur la fig. 6) reste invariable, mais l'algorithme doit prévoir le choix automatique des nouvelles branches totales dans le réseau de circulation.

4. REALISATION DE L'ALGORITHME **PARALLELISE**

L'utilisation de la diakoptique pour la parallélisation apparaît comme une évidence : on accomplit parallèlement le calcul des sous-schémas séparés. Les résultats du calcul des impédances des noeuds aux frontières sont ensuite soumis à un processeur principal qui accomplit alors le calcul du schéma Le résultat du calcul est le vecteur des courants de mailles du schéma total. Leurs valeurs sont redistribuées par le processeur principal aux autres processeurs. Ensuite on effectue le calcul parallélisé des sous-schémas en tenant compte des courants ajoutés au schéma total. Un tel algorithme demande des dépenses minima en temps de transmission de données entre les processeurs.

Dans le tableau 1 on présente les étapes principales de l'algorithme. Les lignes obscurcies (4, 5, 7, 8,

11) correspondent à la partie séquentielle de l'algorithme. Les lignes (1, 2, 6, 10) correspondent à la partie parallélisée de l'algorithme. Les lignes 3 et 9 correspondent à l'envoi des données entre les cœurs. Dans le tableau, dans les lignes 5 et 8, on présente deux variantes de l'algorithme. La variante de gauche correspond au calcul de la matrice inverse des résistances linéaires du schéma total. La variante de droite correspond au calcul du schéma total par la méthode du Gauss.

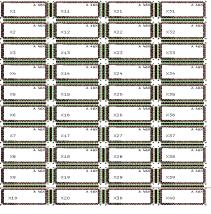
TABLE I. L'ALGORITHME DU CALCUL

№	Nom de l'étape	Formule	
1	Entrée du schéma et des sous- schémas		
2	Calcul des résistances des sous- schémas. Séparation des résistances de frontière des sous-schémas	(2)	
3	Collecte d'information sur les résistances de frontière		
4	Formation de la topologie du schéma total	(3)	
5	Formation des matrices des résistances du schéma total	(4) (6)	(4)
6	Calcul des tensions nodales des sous-schémas	(1)	
7	Calcul des fem de mailles du schéma total	(5)	
8	Calcul des courants du schéma total	(7)	(7)'
9	Envoi des résultats i _m		
10	Calcul des accroissements des courants de nœuds. Calcul de la réponse définitive.	rrants de nœuds. Calcul de la (8)-(15)	
11	Enregistrement des résultats du calcul		

Le logiciel est programmé sur Intel Fortran Compiler XE 12.0. Pour la programmation parallèle on utilise la technologie coarray Fortran [3]. Cette technologie est très simple pour la programmation de l'échange des données entre les processeurs. Dans le travail présenté le logiciel était testé pour 32-cœurs et 40-cœurs d'architecture Intel. Au cours du test on fixait le temps de calcul et les caractéristiques principales des calculs parallélisés. L'accélération est calculée selon la formule $A = (N \cdot$ Tp + Ts)/(Tp + Ts), où Ts est le temps de calcul de la partie séquentielle du programme, Tp - le temps de calcul de la partie parallélisée du programme et N le nombre de cœurs (sous-schémas). L'efficacité est calculée selon la formule : E=A/N. Pour la préparation des données on utilise les descriptions des schémas et les descriptions des sous-schémas

dans un format Spice. Ce format représente la liste des liaisons des éléments électriques et est généré automatiquement par la plupart des logiciels de schémas électriques de types CAD-CAM.

Comme exemple, pour le calcul d'un schéma comprenant 40 sous-schémas identiques et 2047 résistances dans chaque sous-schéma en topologie cellulaire (Fig.7), 8.7 secondes environ de temps de calcul ont été nécessaires. L'accélération est d'à peu près 19 et l'efficacité de 0.48.



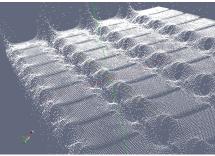


Figure 7: résultats du calcul des tensions des branches du schéma. Le point séparé correspond à la valeur de tension sur une branche du réseau total. Le nombre de branches est de 81880.

Au cours du test, le grand schéma se divisait en différents nombres de sous-schémas. Le nombre total des résistances restait identique (la dimension du système ne changeait pas). Le schéma se divisait en 3, 6, 12 et 24 parties. Le nombre total des résistances restait environ égal à 6200, l'ordre du schéma était d'environ 3100. Avec l'augmentation du nombre de sous-schémas, leur dimension diminue alors que la dimension du réseau des intersections augmente. Les résultats sont présentés Fig.8.

On peut alors étudier l'augmentation de la dimension du schéma au détriment de l'augmentation du nombre de sous-schémas (et en

conséquence du nombre de cœurs). Le nombre de sous-schémas augmente de 4 jusqu'à 40. Chaque sous-schéma a 2047 résistances, 1055 paires de nœuds (et de fait 992 contours). Le nombre de branches du lien augmente de 130 pour 4 sous-schémas jusqu'à 2214 pour 40 sous-schémas. Ainsi, le nombre de résistances du schéma a augmenté de 8318 jusqu'à 84094. L'ordre du système augmente de 4098 jusqu'à 41894 (Fig.9).

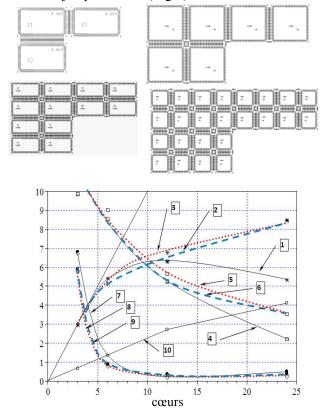


Figure 8: 1, 2, 3 - Accélération; 4, 5, 6 - Efficacité *10; 7,8,9 - Temps, sec; 10 - nombre total de résistances des liens divisé par 100. Au découpage du schéma le nombre de liens a augmenté de 65 jusqu'à 410. Les lignes continues correspondent aux calculs sans IMKL (Intel Math Kernel Library 10.3); les lignes interrompues correspondent aux calculs avec IMKL pour le calcul des matrices inverses; les lignes pointillées correspondent aux calculs avec IMKL pour la méthode du Gauss.

La méthode présentée est assez universelle et peut être adaptée pour la conception d'une large classe de problèmes différents du génie électrique ou de l'électronique en général, dont la compatibilité électromagnétique. On a utilisé cette méthode pour la gestion des ordinateurs d'un processeur, dédié aux tâches de génie électrique dans le domaine d'étude des entraînements asynchrones avec gestion vectorielle; dans le cas d'études de compatibilité

électromagnétique des réseaux de traction des chemins de fer avec lignes de transmission, ou encore dans le cas de calculs de commande électrique de traction avec moteurs linéaires [4], etc.

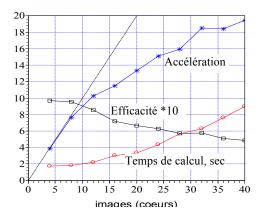


Figure 9: augmentation de la dimension du schéma au détriment de l'augmentation du nombre de sousschémas

5. REMERCIEMENTS

Je remercie Olivier Maurice pour son aide à la préparation de cet article en français. Je remercie le personnel du laboratoire Intel(R) ManycoreTestyngLab pour leur accord afin d'estimer l'efficacité des algorithmes élaborés et des programmes de calculs parallélisés sur des architectures multi-cœurs.

6. REFERENCES

- [1] Kron G., Diakoptic: the Piecewise Solution of Large-Scale Systems, London: MacDonald. 1963
- [2] Maurice Olivier & Reineix Alain, *Proposition d'un formalisme comme support pour les études théoriques en systémique*. Congrès UES, 2011.
- [3] Robert W.Numrich, Parallel Numerical Algorithms Based on Tensor Notation and Co-Array Fortran Syntax. Parallel Computing, 31, p.588, 2005.
- [4] V.A. Vinokurov, A.T. Gorelov, and Yu.N. Sokhor, *Application of Tensor Decomposition in Studying Linear Induction Motors*. Russian Electrical Engineering, Allerton Press, Inc. distributed exclusively by Springer Science+Business Media LLC. Vol. 79, No. 5, pp. 234–237, 2008.